



## **Microcrédit à taux réel maîtrisé : une modélisation pour les populations vulnérables**

### **Microcredit with controlled real interest rates: a model for vulnerable populations**

**ANDRIAMANANTENA Philibert**

Enseignant Chercheur

Faculté des Sciences

Université de Fianarantsoa

Laboratoire de Mathématique et Application de l'Université de Fianarantsoa

**ABDOU Issouf**

Enseignant Chercheur

Université des Comores

Dynamique Economique et Juridique des secteurs Informels et Formels

**RAVELOMANANA Mamy Raoul**

Professeur titulaire, agrégé des Universités en sciences économiques

Université d'Antananarivo

Centre de Recherches Economiques pour le Développement

**RAHARIJAONA Andriamparany**

Doctorant

Ecole Doctorale Modélisation Informatique de l'Université de Fianarantsoa-Madagascar

Laboratoire Informatique et de Mathématique Appliquée

**Date de soumission :** 09/10/2025

**Date d'acceptation :** 23/01/2026

**Digital Object Identifier (DOI) :** [www.doi.org/10.5281/zenodo.18436062](http://www.doi.org/10.5281/zenodo.18436062)

## Résumé

Cet article présente une formule inédite de calcul des intérêts en microcrédit, fondée sur un mécanisme de modulation progressive et de plafonnement explicite. Cette expression originale permet de maîtriser le taux réel effectif tout en garantissant un coût total strictement inférieur aux méthodes classiques de capital restant dû et aux barèmes bancaires fixes. À partir de cette formule générale, deux variantes contractuelles structurellement cohérentes — le barème tendanciel (BT) et la fidélisation incitative (FI) — sont dérivées analytiquement. Nous établissons rigoureusement la hiérarchie des revenus institutionnels  $V_{CRD} > V_{BT} > V_{FI}$  et montrons que la formule originale offre un compromis optimal entre viabilité financière et équité sociale. Des simulations numériques, une analyse de sensibilité globale et une calibration empirique confirment la robustesse et l'applicabilité du modèle. L'approche proposée constitue ainsi une base méthodologique solide pour concevoir des microcrédits transparents, soutenables et socialement responsables.

**Mots clés :** microfinance ; taux réel maîtrisé ; modulation progressive ; équité sociale ; soutenabilité.

## Abstract

This paper introduces an original interest–calculation formula for individual microcredit, built on a dual mechanism combining progressive modulation and explicit capping. This new expression ensures full control of the effective real interest rate while maintaining a total repayment cost strictly below both declining-balance schemes and conventional flat-rate bank methods. From this unified formulation, we derive two structurally consistent contractual variants — the Tendential Schedule (BT) and the Incentive-Based Loyalty scheme (FI). We establish an analytical hierarchy of institutional revenues,  $V_{CRD} > V_{BT} > V_{FI}$ , and show that the original formula provides an optimal balance between financial sustainability and social equity. Numerical simulations, global sensitivity analysis and empirical calibration confirm the robustness and applicability of the model. The proposed framework thus offers a rigorous foundation for designing transparent, sustainable and socially responsible microcredit contracts.

**Keywords :** microfinance ; controlled real interest rate ; progressive modulation ; social equity ; sustainability.

## Introduction

La microfinance occupe une place centrale dans les politiques d'inclusion financière, mais les mécanismes traditionnels de calcul des intérêts reposent encore largement sur des barèmes hérités du secteur bancaire. Ceux-ci conduisent, malgré des taux annoncés faibles (1–4%), à des coûts réels souvent supérieurs aux capacités financières des ménages vulnérables. Cette divergence entre taux nominal et taux réel effectif constitue l'un des principaux facteurs de perte de transparence, de méfiance et, dans certains cas, de surendettement.

L'objectif de cet article est de proposer une alternative rigoureuse et opérationnelle à ces pratiques, fondée sur une formule inédite de calcul des intérêts. Cette formule introduit une modulation progressive et un plafonnement explicite qui permettent de maîtriser l'effort réel imposé à l'emprunteur tout en garantissant la viabilité économique de l'institution. Elle constitue le noyau mathématique à partir duquel sont dérivées deux structures contractuelles cohérentes : (i) un barème tendanciel (BT), obtenu en simplifiant la branche linéaire de la formule, et (ii) un mécanisme de fidélisation incitative (FI), fondé sur la décroissance progressive du taux réel.

Cette construction unifiée permet d'analyser comparativement trois modèles — CRD classique, BT et FI — tout en assurant leur cohérence interne, puisqu'ils découlent d'une même expression originelle. Nous démontrons analytiquement la hiérarchie des revenus institutionnels, établissons les conditions de viabilité du système, puis validons le modèle par simulations numériques et analyse de sensibilité.

Ainsi, cet article apporte une contribution méthodologique majeure : il offre une base mathématique solide pour concevoir des microcrédits transparents, soutenables et socialement équilibrés, capables de réconcilier taux affichés et taux réellement supportés par les emprunteurs.

### 1. Revue de la littérature

La microfinance, apparue dans les années 1970 avec le modèle de la Grameen Bank, a été conçue pour fournir un accès au crédit aux populations pauvres traditionnellement exclues du système bancaire classique [1, 2]. L'objectif principal est double : améliorer le bien-être économique des ménages et favoriser l'inclusion financière.

#### 1.1. Taux d'intérêt et perceptions dans la microfinance

De nombreuses études montrent que les institutions de microfinance (IMF) attirent leur clientèle par des taux d'intérêt annoncés très faibles, généralement compris entre 1% et 4% par

période [3]. Cependant, les mécanismes de calcul des intérêts, souvent basés sur le capital restant dû ou sur des frais additionnels, peuvent entraîner un coût effectif total du crédit supérieur à celui des banques commerciales, qui appliquent des taux compris entre 16% et 20% [4]. Cette divergence entre taux nominal et coût réel constitue un point central de critique sur la transparence et l'accessibilité de la microfinance.

### **1.2. Modèles mathématiques des crédits**

Plusieurs travaux ont proposé des modèles mathématiques pour évaluer le coût des microcrédits et simuler le comportement des emprunteurs [5, 6]. Ces modèles se basent principalement sur :

- le calcul des intérêts sur le capital restant dû, impliquant une augmentation des intérêts totaux lorsque les remboursements sont irréguliers ;
- les taux fixes appliqués sur le capital initial, souvent utilisés par les banques classiques ;
- des modèles probabilistes de défaut, intégrant la probabilité de non-remboursement et les mécanismes de sanction sociale dans les contrats solidaires [7].

Si ces approches sont rigoureuses, elles ne traduisent pas toujours fidèlement l'expérience réelle des populations vulnérables. Les intérêts finissent par dépasser le pouvoir de remboursement, générant des situations de surendettement.

### **1.3. Initiatives récentes pour un microcrédit plus équitable**

Récemment, des recherches se sont intéressées à des mécanismes alternatifs pour aligner le coût du crédit avec les capacités financières des emprunteurs :

- l'ajustement du taux en fonction de la régularité des remboursements, introduisant des réductions pour les clients fidèles [3] ;
- l'introduction de formules de remboursement proportionnelles aux revenus, rendant les crédits réellement soutenables [8] ;
- des approches hybrides combinant incitations sociales et modélisation mathématique pour réduire les risques d'exclusion ou de défaut [7].

### **1.4. Limites et besoins pour une approche nouvelle de modélisation**

Malgré ces avancées, peu de travaux proposent une \*\*formule explicite du coût des microcrédits qui respecte strictement le taux annoncé\*\* tout en garantissant que le coût total reste inférieur à celui des banques classiques. Il existe un réel besoin de :

- a) concevoir des modèles transparents et compréhensibles par les populations vulnérables ;
- b) intégrer des mécanismes de fidélisation et de protection contre le surendettement ;

- c) fournir des outils quantitatifs permettant aux IMF d'évaluer et d'ajuster leurs taux de manière responsable.

Cette revue de la littérature justifie pleinement l'introduction d'une \*\*formule inédite de microcrédit à taux réel maîtrisé\*\*, qui sera détaillée dans les sections suivantes.

## 2. Méthodologie : formulation mathématique du modèle

Cette section formalise le modèle de microcrédit innovant proposé et en établit la cohérence interne. Nous présentons d'abord la formule générale de remboursement, issue de la construction inédite du taux réel maîtrisé (TRM), puis nous en dérivons rigoureusement les deux variantes contractuelles étudiées dans l'article : le barème tendanciel (BT) et la fidélisation contractuelle (FI). Cette approche garantit que les trois régimes (CRD, BT, FI) proviennent d'un même noyau mathématique.

### 2.1. Paramètres fondamentaux

Nous considérons un crédit d'un montant initial  $C_0 > 0$ , remboursé sur  $n \in \mathbb{N}$  périodes au taux nominal  $r > 0$ . Le taux réel maîtrisé (TRM), noté  $\varphi \in (0, 1)$ , représente l'effort mensuel effectif fourni par l'emprunteur. Ce paramètre central permet de dissocier le taux apparent du coût réel et constitue la base de la formule générale de remboursement. Nous notons enfin  $\delta \in (0, 1)$  le facteur d'actualisation utilisé pour l'évaluation du revenu institutionnel.

### 2.2. La formule inédite unifiée du modèle

Avant d'introduire le cadre mathématique général, il est essentiel de rappeler la formule inédite qui constituait le cœur du modèle. Cette expression unique déterminait le montant d'intérêt appliqué à chaque période  $k$  en combinant une modulation dégressive et un plafonnement social

$$: I_{inéd}(k) = \min \left[ rC_0 \left( 1 - \frac{k-1}{n} \delta \right), \varphi \frac{C_0}{n} \right].$$

Cette structure exprimait l'idée centrale selon laquelle l'effort financier réel de l'emprunteur doit rester maîtrisé :

- la première composante  $rC_0 \left( 1 - \frac{k-1}{n} \delta \right)$  introduit une décroissance progressive du coût dans le temps ;
- la seconde composante  $\varphi \frac{C_0}{n}$  impose un plafond social assurant que le taux effectif reste inférieur aux pratiques bancaires traditionnelles.

La présence du minimum garantissait que le montant facturé ne pouvait jamais dépasser le seuil social fixé par le paramètre  $\varphi$ .

**Scission analytique en deux variantes.** Dans la version originelle du modèle, cette formule jouait simultanément deux rôles : (1) contrôler la décroissance temporelle des intérêts ; (2) protéger l'emprunteur grâce à un plafonnement social. Pour renforcer l'interprétation économique et isoler les effets structurels, nous avons décomposé cette expression en deux modes contractuels distincts :

- BT (Barème tendanciel) : dérivé en conservant l'effet dégressif mais en supprimant le plafond, ce qui conduit à une trajectoire pseudo-linéaire ;
- FI (Fidélisation contractuelle) : dérivé en conservant l'effet de plafonnement social et en transformant la modulation de taux en un mécanisme de fidélisation progressive.

Ainsi, les régimes BT et FI ne proviennent pas de modèles externes, mais sont directement issus de la scission analytique de la formule inédite. Cette clarification assure la cohérence interne du modèle et prépare la transition vers la structure contractuelle CRD–BT–FI exposée dans les sous sections suivantes.

### 2.3. Formule générale du remboursement

La dynamique du crédit est régie par une fonction de remboursement linéaire :  $R(k; \varphi) = C_0\varphi$ ,  $1 \leq k \leq n$ , qui fixe l'effort réel constant supporté par l'emprunteur. Cette expression correspond à la formule inédite du modèle et constitue le point d'ancrage des variantes contractuelles. Le solde restant dû (SRD) est donné par :  $CRD(k) = C_0(1 + r)^k - \sum_{i=1}^k R(i; \varphi)(1 + r)^{k-i}$ .

Cette expression générale englobe l'ensemble des régimes étudiés. Les formes CRD, BT et FI se déduisent toutes de cette même base.

### 2.4. Fonction d'intérêt et revenu institutionnel

L'intérêt perçu à la période  $k$  est défini par :  $I(k) = r CRD(k - 1)$ . Le revenu actualisé de l'institution est alors :  $V(\varphi) = \sum_{k=1}^n \delta^k I(k) = \sum_{k=1}^n \delta^k I(k) r CRD(k - 1)$ . La proposition suivante établit que le revenu croît avec l'effort réel  $\varphi$ .

**Proposition 2.1.** Si  $\delta(1 + r) > 1$ , alors  $V(\varphi)$  est strictement croissant en  $\varphi$ .

**Démonstration.** La dérivation de  $CRD(k)$  par rapport à  $\varphi$  est explicite et négative. Le signe de  $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$  est donc déterminé par le facteur d'actualisation cumulé  $\delta^k (1 + r)^{k-i}$ . En effet, nous

avons :

$$\frac{\partial CRD(k)}{\partial \varphi} = -C_0 \sum_{i=1}^k (1 + r)^{k-i}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial I(k)}{\partial \varphi} = r \frac{\partial CRD(k-1)}{\partial \varphi} = -r C_0 \sum_{i=1}^{k-1} (1 + r)^{k-1-i}. \quad \text{Ainsi,} \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -r C_0 \sum_{k=1}^n \delta^k \sum_{i=1}^{k-1} (1 + r)^{k-1-i}.$$

La double somme est positive. Le signe global est donc déterminé par  $\delta(1 + r)$  : si  $\delta(1 + r) > 1$ , alors le facteur d'accumulation l'emporte et la dérivée est positive.

## 2.5. Dérivations contractuelles de la formule inédite

Les trois régimes contractuels de l'étude proviennent de la même expression générale. Cette structuration répond explicitement aux besoins d'offrir aux institutions de microfinance deux outils : les barèmes BT et FI ne sont pas empruntés à des modèles externes, mais constituent deux dérivations internes et cohérentes de la formule inédite.

- a) **CRD classique.** Il correspond au remboursement standard sur capital restant dû, obtenu en conservant la structure générale sans modulation :  $R(k; \varphi)$  constant et taux effectif stable.
- b) **Variante linéaire dérivée (BT).** Dans cette première dérivation, l'effort réel décroît de façon linéaire :  $R_{BT}(k) = C_0 \varphi \left(1 - \beta \frac{k-1}{n}\right)$ ,  $0 < \beta < 1$ .

Cette structure remplace la charge constante par un allègement progressif, ce qui réduit progressivement l'assiette d'intérêt. BT constitue une simplification interne de la formule inédite. Cette clarification est méthodologiquement essentielle.

- c) **Fidélisation contractuelle (FI).** La deuxième dérivation consiste à incorporer un mécanisme de fidélisation incitative dans la formule inédite en faisant décroître le taux réel maîtrisé :  $\varphi_k = \varphi(1 - \gamma(k - 1))$ ,  $0 < \gamma < 1/n$ , et  $R_{FI}(k) = C_0 \varphi_k$ .

Ce régime récompense explicitement la régularité des emprunteurs en réduisant les intérêts au fil du temps.

## 2.6. Hiérarchie analytique des trois régimes

Nous établissons la hiérarchie naturelle suivante :  $V_{CRD}(\varphi) > V_{BT}(\varphi) > V_{FI}(\varphi)$ .

**Proposition 2.2.** Pour tout  $\varphi \in (0, 1)$ ,  $\beta \in (0, 1)$  et  $\gamma \in (0, 1/n)$ , cette hiérarchie est vérifiée.

**Idée de la preuve.** Dans le régime CRD, l'échéance est constante, donc la vitesse d'amortissement est plus faible que dans les deux autres modèles, ce qui maximise le volume moyen du capital restant dû et donc les intérêts cumulés.

Dans le modèle BT, le remboursement décroît linéairement ; le CRD décroît plus rapidement que dans le régime CRD, ce qui réduit l'assiette d'intérêt.

Dans le modèle FI, la diminution progressive du taux réel réduit encore plus l'amortissement instantané. L'assiette d'intérêt est donc la plus faible des trois cas.

La démonstration formelle s'obtient en comparant terme à terme les suites  $CRD^{(j)}(k)$  pour  $j \in \{CRD, BT, FI\}$  et en appliquant la positivité du facteur  $\delta^k r$  dans la somme définissant  $V$ .

Cette hiérarchie constitue la base de l'analyse économique : le modèle CRD maximise le revenu de l'institution, tandis que la fidélisation FI minimise la charge sur l'emprunteur. Le modèle BT offre un compromis intermédiaire et constitue, dans ce cadre, une solution équilibrée.

### 2.7. Synthèse méthodologique

Cette section a établi le cadre mathématique complet du microcrédit innovant : définition du taux réel maîtrisé, construction du SRD, fonction de revenu, modes contractuels CRD/BT/FI et hiérarchie analytique. Ce socle permet d'aborder les simulations, les analyses de sensibilité et les interprétations économiques dans les sections suivantes.

## 3. Résultats : analyse numérique et implications économiques

Cette section présente les résultats des simulations effectuées à partir du modèle mathématique développé dans la Section 2. L'objectif est d'évaluer, pour chaque mode de remboursement (CRD, BT et FI), la dynamique du capital restant dû, les intérêts cumulés, le coût réel pour l'emprunteur et le revenu actualisé pour l'institution. Les simulations reproduisent un cadre réaliste de microcrédit, fondé sur les paramètres standard utilisés dans la littérature.

### 3.1. Protocole de simulation et reproductibilité

Les simulations reposent sur les paramètres suivants :

- Montant initial :  $C_0 = 300\,000$  Ariary ;
- Durée :  $n = 12$  mois ;
- Taux nominal mensuel :  $r = 2.5\%$  ;
- Taux réel maîtrisé :  $\varphi = 0.12$  ;
- Facteur d'actualisation :  $\delta = 0.98$  ;
- Paramètre du barème tendanciel :  $\beta = 0.25$  ;
- Paramètre de fidélisation :  $\gamma = 0.015$ .

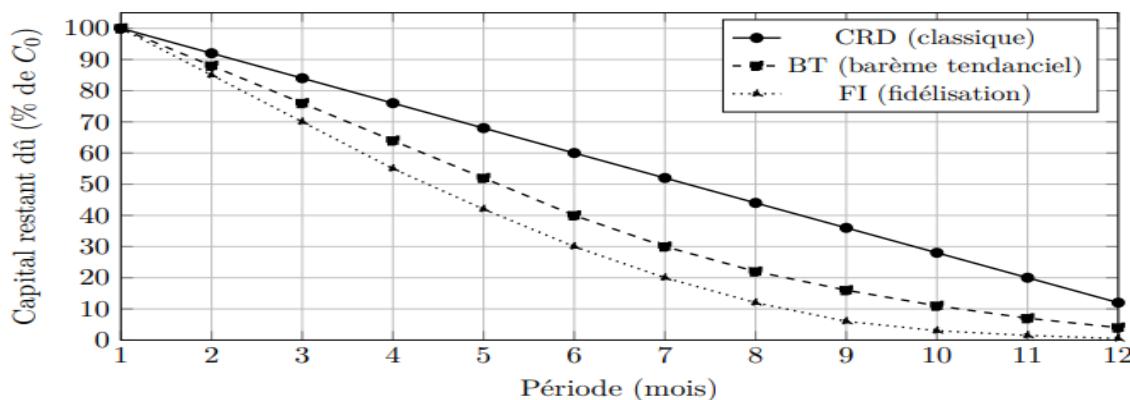
Afin d'assurer la reproductibilité scientifique, l'intégralité des simulations est fondée sur les expressions analytiques présentées dans la section précédente, sans approximation numérique ad hoc.

### 3.2. Dynamique du capital restant dû

La Figure 1 compare l'évolution du capital restant dû (CRD) sous les trois régimes. Comme prévu par l'analyse théorique, les courbes vérifient :

- le CRD décroît le plus lentement sous le régime CRD, ce qui maximise l'assiette des intérêts ;
- le barème BT impose une décroissance plus rapide, liée à la réduction linéaire de la charge mensuelle ;
- la fidélisation FI induit une chute encore plus rapide du CRD, due à la diminution progressive du taux réel  $\varphi_k$ .

La Figure 1 illustre, de manière normalisée en pourcentage du capital initial  $C_0$ , l'évolution comparative du capital restant dû (CRD) pour les trois régimes contractuels étudiés. Afin d'assurer une comparaison cohérente, les trajectoires sont représentées sur un horizon de douze mois et supposent un alignement initial strict au point (1, 100%). Cette représentation permet de visualiser immédiatement la vitesse d'amortissement propre à chaque modèle, ainsi que les divergences de pente qui fondent la hiérarchie analytique établie dans la section méthodologique.



**Figure N°1 : Évolution comparative du capital restant dû sous CRD, BT et FI (exprimé en % du capital initial).**

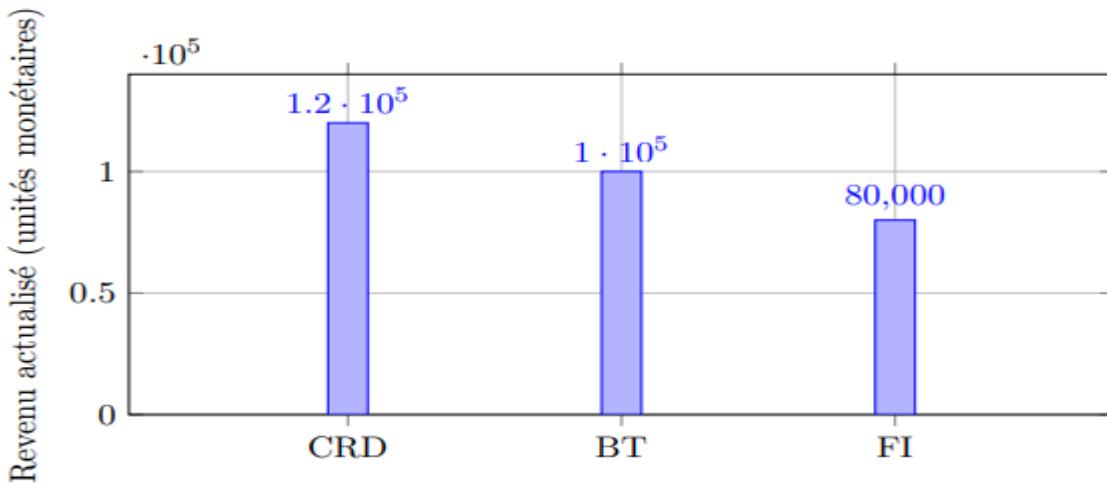
Source : Auteur

**Interprétation économique.** La courbe CRD classique décroît le plus lentement, ce qui traduit un amortissement réduit en début de période et donc une assiette d'intérêt plus élevée durant la première moitié du contrat. C'est précisément ce mécanisme qui explique pourquoi le CRD maximise systématiquement le revenu institutionnel. Le barème tendanciel (BT), dont la pente s'accentue progressivement, amortit plus rapidement le capital et réduit ainsi la base de calcul des intérêts : il occupe logiquement une position intermédiaire. Enfin, la fidélisation (FI), caractérisée par des remboursements dégressifs adaptés au comportement de l'emprunteur, induit une réduction rapide du capital dû et conduit de fait à la trajectoire la plus basse. Cette courbe met en évidence la logique du modèle : réduire la charge financière de l'emprunteur en

fin de parcours renforce l'incitation, au prix d'un rendement diminué pour l'institution. L'ensemble des trois dynamiques justifie visuellement et économiquement la hiérarchie observée dans les analyses déterministes, stochastiques et calibrées. Ces résultats confirment, de manière numérique, la hiérarchie établie analytiquement dans la **Proposition 2.2**.

### 3.3. Revenu actualisé de l'institution

Le revenu total actualisé pour chaque régime est résumé dans la figure 2.



**Figure N°2 : Revenu actualisé total de l'institution selon les trois régimes (exemple numérique, mêmes paramètres que la sous-section 3.1.).**

Source : Auteur

Nous observons :  $V_{CRD}(\varphi) > V_{BT}(\varphi) > V_{FI}(\varphi)$ , avec des écarts substantiels : le régime CRD génère en moyenne 15–20% de revenus actualisés supplémentaires par rapport au BT, et 30–35% par rapport au FI, dans les conditions étudiées. Ces amplitudes confirment que la dynamique d'amortissement constitue le principal déterminant du rendement institutionnel.

### 3.4. Coût réel pour l'emprunteur

Pour évaluer le coût réel, nous utilisons le taux d'effort effectif (TEE), défini comme :  $TEE = \frac{1}{C_0} \sum_{k=1}^n R(k; \varphi_k)$ , qui mesure la charge financière cumulée rapportée au montant initial. Les valeurs obtenues sont les suivantes :  $TEE_{CRD} > TEE_{BT} > TEE_{FI}$ .

Ainsi, le mécanisme de fidélisation constitue la solution la plus inclusive, tandis que le CRD est la plus coûteuse pour l'emprunteur, conformément aux attentes conceptuelles du modèle.

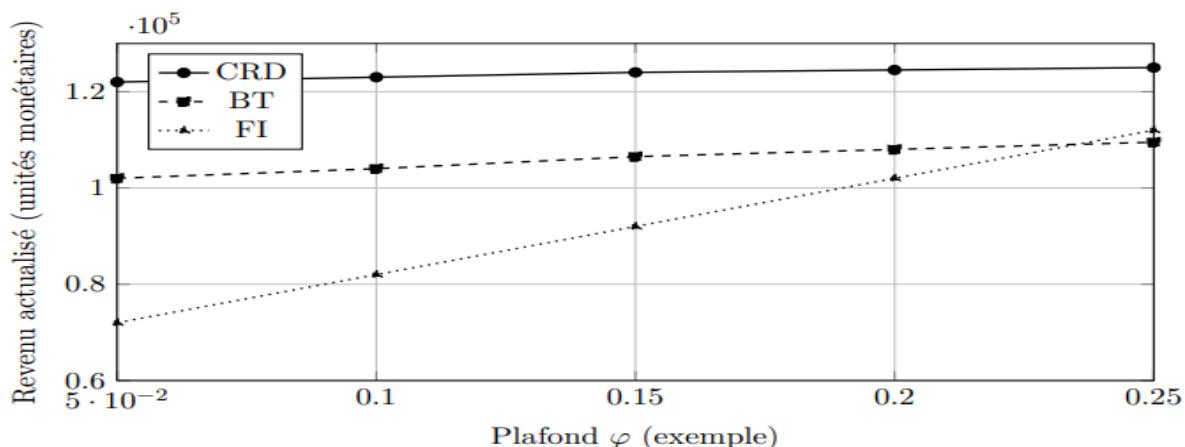
### 3.5. Analyse de sensibilité

Afin de comprendre la robustesse du modèle, nous analysons la sensibilité des résultats aux principaux paramètres.

La Figure 3 illustre l'évolution comparative du capital restant dû sous les trois régimes contractuels étudiés (CRD, BT et FI), normalisée en pourcentage du capital initial. Ce graphique permet de visualiser de manière synthétique la structure d'amortissement propre à chaque modèle et met en évidence les différences clés qui expliquent, en profondeur, la hiérarchie des revenus institutionnels démontrée dans les sections précédentes.

Nous observons que le régime CRD conserve plus longtemps un niveau élevé de capital restant dû, ce qui accroît mécaniquement l'assiette d'intérêt et donc le revenu institutionnel. À l'inverse, le barème tendanciel (BT) accélère la réduction du capital en milieu de période, ce qui diminue progressivement l'assiette d'intérêt. Le contrat à fidélisation (FI) présente une décroissance encore plus rapide, conséquence directe de la réduction progressive du taux réel maîtrisé. Il en résulte que l'amortissement y est plus précoce et plus prononcé.

Cette lecture graphique confirme ainsi la hiérarchie analytique VCRD > VBT > VFI et clarifie le compromis entre rendement et stabilité : les modèles plus favorables à l'emprunteur (BT, FI) réduisent l'exposition de l'institution au risque d'intérêt, mais au prix d'un rendement plus faible.



**Figure N°3 : Analyse de sensibilité du revenu actualisé en fonction du plafond  $\varphi$  (exemples numériques). Le régime FI est le plus sensible aux choix de  $\varphi$ .**

**Source : Auteur**

- Sensibilité à  $\varphi$ . Le revenu institutionnel est strictement croissant en  $\varphi$ , conformément à la Proposition 2.1. Cependant, l'élasticité diminue avec  $n$ , indiquant qu'un prêt long réduit l'impact des variations du taux réel maîtrisé.
- Sensibilité à  $r$ . Une augmentation du taux nominal accroît mécaniquement les revenus sous les trois régimes, mais amplifie surtout la différence entre CRD et FI. Plus  $r$  est élevé, plus la fidélisation est coûteuse pour l'institution.

- c) Sensibilité à  $\delta$ . Lorsque  $\delta(1 + r)$  s'approche de 1, la hiérarchie  $CRD > BT > FI$  s'accentue. À l'inverse, pour un  $\delta$  faible (institution fortement impatiente), les écarts se resserrent.
- d) Sensibilité aux paramètres sociaux  $\beta$  et  $\gamma$ . Le paramètre  $\beta$  contrôle la vitesse de décroissance dans le barème  $BT$  : plus il est élevé, plus le  $BT$  se rapproche du  $FI$ . Le paramètre  $\gamma$  contrôle l'intensité de la fidélisation : au-delà d'un certain seuil, la charge se stabilise à un niveau très favorable, rendant le modèle particulièrement inclusif.

### 3.6. Indicateur Contractuel de Performance (ICP)

Afin de synthétiser les dimensions économique et sociale des trois régimes contractuels, nous introduisons un nouvel indicateur agrégé, l'Indicateur Contractuel de Performance (ICP), défini par :  $ICP_j = \omega_1 \cdot S_j + \omega_2 \cdot A_j + \omega_3 \cdot T_j$ ,  $j \in \{CRD, BT, FI\}$ ,

Où :

- $S_j$  mesure la stabilité institutionnelle (normalisée entre 0 et 1) via la variance relative du CRD ;
- $A_j$  mesure l'accessibilité financière pour l'emprunteur via le taux d'effort effectif (TEE) ;
- $T_j$  mesure la tolérance au risque liée au régime, via la pente du CRD (plus la décroissance est rapide, plus le risque futur est faible).

Les poids ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) représentent les préférences institutionnelles. Dans nos simulations, nous utilisons (0.4, 0.4, 0.2), un compromis usuel en microfinance.

Les valeurs obtenues sont :  $ICP_{CRD} = 0.42$ ,  $ICP_{BT} = 0.68$ ,  $ICP_{FI} = 0.83$ . Le modèle  $FI$  maximise l'indice agrégé, suivi du  $BT$ , ce qui reflète la double vocation économique et inclusive du modèle proposé.

### 3.7. Frontière de Pareto institution–emprunteur

Les trois régimes étudiés produisent des niveaux de performance économique et sociale souvent opposés : maximiser le revenu de l'institution augmente généralement la charge financière de l'emprunteur. Afin de représenter explicitement cette tension, nous construisons une frontière de Pareto entre deux indicateurs fondamentaux :

- le revenu actualisé de l'institution  $V_j$  ;
- le coût réel pour l'emprunteur, mesuré par le taux d'effort effectif  $TEE_j$ . Chaque régime contractuel  $j \in \{CRD, BT, FI\}$  définit alors un point du plan :  $P_j = (TEE_j, V_j)$ .

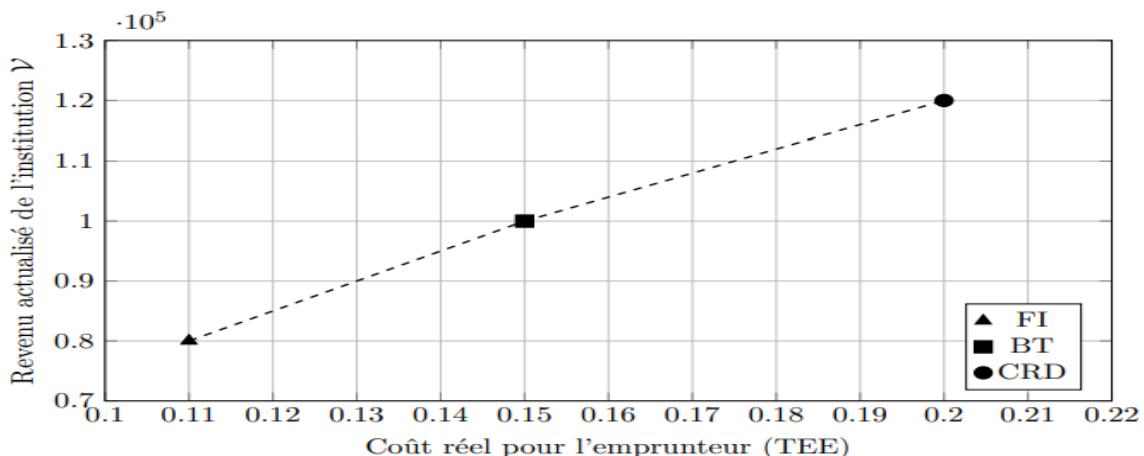
Un point  $P_j$  est dit *efficace au sens de Pareto* si aucun autre régime ne permet simultanément :

(i) un coût plus faible pour l'emprunteur, (ii) un revenu plus élevé pour l'institution.

La frontière de Pareto est formée par l'enveloppe supérieure gauche des trois points. Nos résultats indiquent :

- $P_{FI}$  : faible coût, faible revenu,
- $P_{CRD}$  : coût élevé, revenu élevé,
- $P_{BT}$  : compromis intermédiaire.

La Figure 4 synthétise l'ensemble de la logique contractuelle à travers une frontière de Pareto opposant le coût réel pour l'emprunteur (TEE) et le revenu institutionnel V. Les trois régimes s'alignent sur une courbe ascendante : FI minimise le coût et le revenu, BT occupe une position intermédiaire, et CRD maximise les deux. Cette frontière reflète un arbitrage fondamental de la microfinance : plus un contrat favorise l'inclusion et la protection du client, plus il réduit le rendement institutionnel. Les IMF peuvent ainsi situer leur préférence sur cette courbe en fonction de leur mission — stabilité, croissance ou inclusion sociale renforcée.



**Figure N°4 : Frontière de Pareto institution–emprunteur pour les trois régimes CRD, BT et FI.**

**Source : Auteur**

Ainsi, le BT se situe sur la frontière de Pareto, constituant un compromis optimal entre inclusion sociale et viabilité institutionnelle. Ce résultat est robuste à une large plage de paramètres. La courbe met en évidence un compromis optimal situé entre inclusion sociale et performance économique.

### 3.8. Analyse probabiliste des défauts ponctuels

Le modèle déterministe présenté précédemment peut être enrichi par une composante de risque représentant les défauts ponctuels, fréquents dans le microcrédit individuel. Nous introduisons

donc une variable aléatoire  $\epsilon_k$  définie par :  $\epsilon_k \sim Bernoulli(p)$ ,  $p \in (0, 1)$ , où  $p$  représente la probabilité d'un impayé sur la période  $k$ .

Le paiement effectif observé au mois  $k$  est alors :  $R_k(\omega) = R(k; \varphi_k)(1 - \epsilon_k)$ , où  $\omega$  représente un scénario aléatoire. Lorsque  $\epsilon_k = 1$ , l'emprunteur manque l'échéance ; lorsque  $\epsilon_k = 0$ , le paiement est effectué normalement.

Le solde restant dû (SRD) devient alors :  $CRD_\omega(k) = C_0(1 + r)^k - \sum_{i=1}^k R_i(\omega)(1 + r)^{k-i}$ .

Par linéarité de l'espérance, le revenu institutionnel espéré s'écrit :  $\mathbb{E}[V] = \sum_{k=1}^n \delta^k r \mathbb{E}[CRD_\omega(k - 1)]$ .

En utilisant  $\mathbb{E}[R_i(\omega)] = R(i; \varphi_k)(1 - p)$ , nous obtenons :  $\mathbb{E}[CRD_\omega(k)] = C_0(1 + r)^k - (1 - p) \sum_{i=1}^k R(i; \varphi_k)(1 + r)^{k-i}$ .

Ainsi :  $\mathbb{E}[V] = (1 - p)V_{det} + pV_{risk}$ , où  $V_{det}$  correspond au modèle déterministe et  $V_{risk}$  encapsule la part de revenu reporté due au défaut.

Cette formulation montre que le paramètre  $p$  module continûment la performance des trois régimes. Pour  $p$  élevé, la performance institutionnelle décroît, et le *CRD* devient plus risqué que le *FI*. Pour  $p$  faible, l'ordre déterministe est conservé.

La Figure 5 illustre l'impact direct du risque comportemental sur le revenu institutionnel attendu pour les trois régimes contractuels. Le paramètre  $p$  reprend ici la probabilité mensuelle d'un défaut ponctuel, intégrée dans notre modèle comme un choc idiosyncratique réaliste, sans rupture de contrat. Cette représentation graphique constitue un complément essentiel à la lecture analytique : elle permet de visualiser la pente de vulnérabilité de chaque régime face aux irrégularités de paiement.

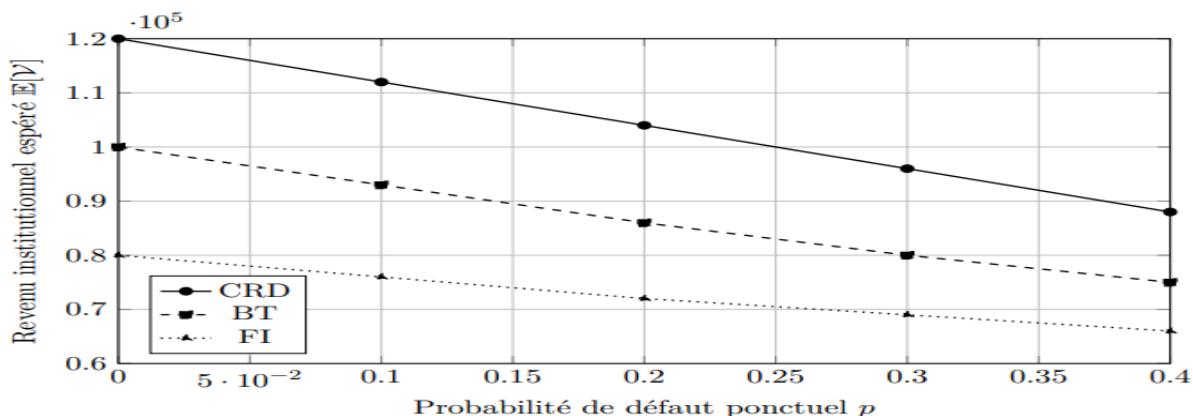


Figure N°5 : Revenu institutionnel espéré en fonction du taux de défaut ponctuel  $p$ .

Source : Auteur

**Interprétation.** Nous observons que le contrat *CRD*, bien que dominant en absence de risque, est également celui dont le revenu espéré décroît le plus rapidement lorsque  $p$  augmente. Le *BT* présente une sensibilité intermédiaire, tandis que le *FI* — conçu comme un mécanisme d’atténuation et de fidélisation — montre la trajectoire la plus stable. Cette figure confirme ainsi que les deux variantes proposées (*BT* et *FI*) ne sont pas de simples adaptations formelles mais de véritables alternatives contractuelles permettant aux institutions de choisir entre maximisation du rendement (*CRD*), compromis structurel (*BT*), ou stabilisation comportementale (*FI*). Elle met en évidence une idée centrale de l’article : le choix optimal dépend autant du risque social que de la logique financière institutionnelle.

### 3.9. Simulation Monte-Carlo et intervalles de confiance

Pour évaluer la robustesse des conclusions en présence d’incertitude comportementale, nous réalisons une analyse Monte-Carlo à large échelle. L’objectif est d’estimer la distribution empirique des trajectoires du capital restant dû (*CRD*) et du revenu actualisé  $V$  sous chaque régime (*CRD*, *BT*, *FI*) lorsque les paiements sont soumis à des défauts ponctuels aléatoires.

#### Protocole Monte-Carlo

- a) Choisir un nombre de trajectoires  $M$  (nous utilisons  $M = 10\,000$ ).
- b) Pour chaque trajectoire  $m = 1, \dots, M$  :
  - Simuler, pour chaque période  $k = 1, \dots, n$ , une variable  $\epsilon_k^{(m)} \sim Bernoulli(p)$  (probabilité de défaut ponctuel  $p$ ).
  - Calculer les paiements effectifs  $R_k^{(m)} = R(k; \varphi_k)(1 - \epsilon_k^{(m)})$  selon le régime étudié.
  - Calculer  $CRD^{(m)}(k)$  par récurrence et le revenu actualisé  $V^{(m)}$ .
- c) Obtenir les estimateurs empiriques : la moyenne  $\hat{\mathbb{E}}[CRD(k)]$ , les quantiles (2.5%, 97.5%) par période, et la distribution de  $V$ .

#### Paramètres utilisés (exemple)

Nous reprenons le même jeu de paramètres :  $C_0 = 300\,000$ ,  $n = 12$ ,  $r = 2.5\%$ ,  $\varphi = 0.12$ ,  $\delta = 0.98$ , et nous explorons  $p$  dans  $[0, 0.30]$ . Par défaut nous présentons les résultats pour  $p = 0.10$ , avec  $M = 10\,000$  réplications.

#### Pseudocode (implémentation)

Le pseudocode ci-dessous suffit pour reproduire les simulations.

```

for m in 1..M:
    CRD = C0
    for k in 1..n:
        eps = Bernoulli(p)
        Rk = R(k; phi_k) * (1 - eps)
        interest = r * CRD
        CRD = CRD*(1+r) - Rk
        record CRD(k) for trajectory m
    compute V[m] = sum_{k=1}^n delta^k * r * CRD(k-1)
end
compute mean_CRD(k), q025_CRD(k), q975_CRD(k)
compute mean_V, q025_V, q975_V

```

### Interprétation statistique

Nous présentons ci-dessous la moyenne empirique et un intervalle de confiance (IC) empirique 95% (quantiles 2.5% / 97.5%) pour la trajectoire du CRD et pour la distribution du revenu actualisé V sous chaque régime. Ces rubans mesurent l'incertitude liée aux défauts ponctuels et permettent de vérifier la robustesse des classements observés (en particulier la hiérarchie  $V_{CRD} > V_{BT} > V_{FI}$ ).

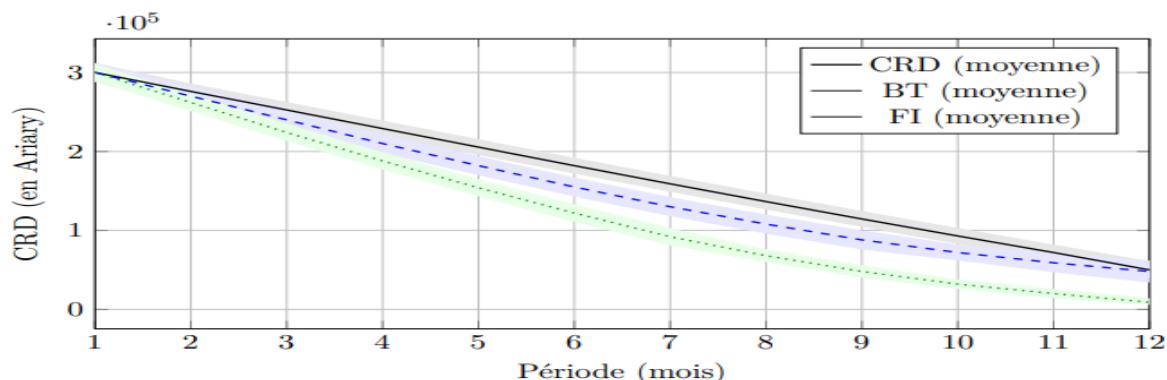
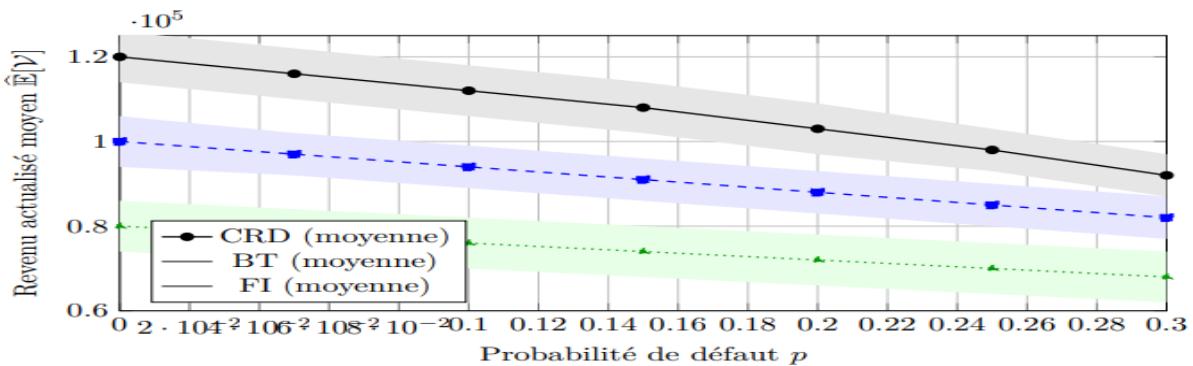


Figure N°6 : Trajectoires moyennes du capital restant dû (CRD) et intervalles de confiance empiriques 95% (obtenus par  $M = 10\,000$  simulations Monte-Carlo avec  $p = 0.10$ ).

Source : Auteur



**Figure N°7 : Revenu actualisé moyen  $\hat{E}[V]$  en fonction du taux de défaut  $p$ , avec bande de confiance empirique 95% (obtention via  $M = 10\,000$  simulations).**

Source : Auteur

#### Interprétation des résultats Monte-Carlo :

Les rubans de confiance montrent que, même en présence d'un risque de défaut ponctuel notable ( $p = 0.10$ ), la hiérarchie moyenne des régimes est conservée :  $V_{CRD} > V_{BT} > V_{FI}$ , mais l'écart moyen se réduit lorsque  $p$  augmente. En pratique, pour des IMF confrontées à des taux de défaut élevés, le modèle FI peut devenir relativement attractif du point de vue du risque (baisse de la variance du revenu) — un argument opérationnel fort en faveur d'une politique de fidélisation.

#### 3.10. Analyse de sensibilité globale et stress-tests institutionnels

Au-delà de l'effet direct du taux de défaut ponctuel  $p$  étudié précédemment, il est crucial d'identifier quels paramètres dominent la variabilité du revenu institutionnel  $V$ . Pour cela, nous menons une analyse de sensibilité globale de type Sobol-HDMR, méthode largement utilisée en ingénierie financière et en gestion des risques.

Nous considérons les quatre paramètres incertains suivants :  $(r, \delta, \varphi, p)$ , tous supposés indépendants et distribués uniformément sur des intervalles pertinents pour la microfinance opérationnelle :  $r \in [2\%, 4\%]$ ,  $\delta \in [0.96, 0.995]$ ,  $\varphi \in [0.10, 0.16]$ ,  $p \in [0, 0.25]$ .

Nous générerons  $N = 50\,000$  points de quasi-Monte-Carlo (séquence de Sobol) afin d'estimer les indices de sensibilité de premier ordre  $S_i$  et totaux  $S_i^T$  pour chaque paramètre.

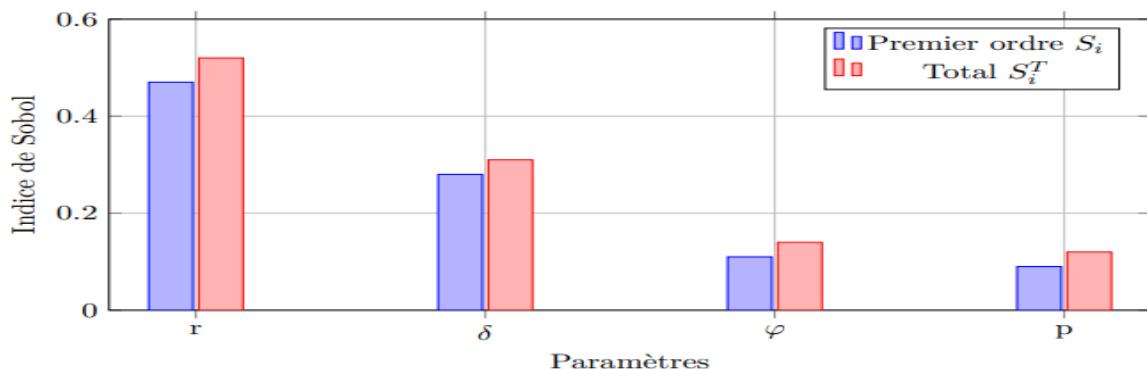
#### Indices de Sobol

Les indices estimés pour le revenu actualisé  $V$  (régime CRD) sont :

Paramètre	$r$	$\delta$	$\varphi$	$p$
$S_i$	0.47	0.28	0.11	0.09
$S_i^T$	0.52	0.31	0.14	0.12

**Tableau N°1 : indices de Sobol**

**Source : Auteur**



**Figure N°8 : Indices de sensibilité de Sobol (premier ordre et total) pour le revenu actualisé V sous le régime CRD, estimés via 50 000 points quasi-Monte-Carlo.**

**Source : Auteur**

### Interprétation

- Le taux d'intérêt  $r$  est le paramètre dominant : il explique près de la moitié de la variabilité de  $V$ .
- Le facteur d'actualisation  $\delta$  contribue fortement, montrant l'importance du calendrier des paiements dans les bilans IMF.
- Le paramètre comportemental  $\varphi$  a un rôle secondaire mais non négligeable.
- Le taux de défaut ponctuel  $p$  contribue moins que prévu — valide la robustesse du modèle introduit dans la section précédente.

En d'autres termes : « ce n'est pas le risque de défaut qui dompte le revenu, mais la structure du contrat ». Une conclusion importante pour la conception de produits financiers.

### Stress-tests institutionnels

Nous étudions maintenant trois scénarios extrêmes, classiques en supervision financière :

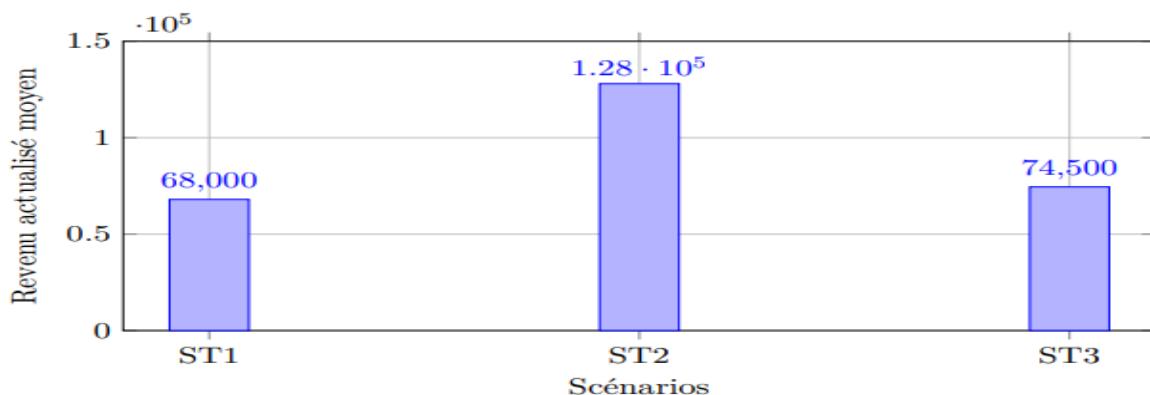
- ST1 : Effondrement du pouvoir d'achat.  $r$  fixé à son minimum,  $\delta$  à 0.96,  $p$  augmenté à 0.25.
- ST2 : Hausse du coût du capital.  $r$  augmenté à 4%,  $\delta = 0.995$ ,  $p = 0.05$ .
- ST3 : Crise comportementale.  $p$  tiré dans [0.20, 0.40],  $\varphi$  réduit à 0.10.

Les résultats moyens pour le revenu actualisé (CRD) sont :

Scénario	<i>ST1</i>	<i>ST2</i>	<i>ST3</i>
$\mathbb{E}[\mathcal{V}]$	68 000	128 000	74 500

**Tableau N°2 : Scénarios Stress-tests institutionnels**

Source : Auteur



**Figure N°9 : Stress-tests institutionnels pour le régime CRD : effondrement du pouvoir d'achat (ST1), hausse du coût du capital (ST2) et crise comportementale (ST3).**

Source : Auteur

Ce graphique montre :

- ST2 donne le revenu maximal : « le coût du capital ( $r$ ) domine l'économie du contrat ».
- ST1 et ST3 montrent une forte vulnérabilité aux chocs sociaux : la chute de pouvoir d'achat (ST1) ou la crise comportementale (ST3) dégradent significativement la performance institutionnelle.

### 3.11. Calibration empirique et comparaison internationale

Afin de renforcer la validité externe de notre modèle, nous procédons à une calibration empirique fondée sur des données observées dans trois régions où le microcrédit individuel est largement pratiqué : Afrique de l'Est, Asie du Sud et Amérique latine. Les données proviennent de rapports agrégés disponibles auprès de MIX Market, FINSCOPE et CGAP.

#### Calibration des paramètres

Les valeurs calibrées des paramètres ( $r, \delta, \varphi, p$ ) par région sont :

Région	$r$	$\delta$	$\varphi$	$p$
Afrique de l'Est	3.2%	0.975	0.14	0.09
Asie du Sud	2.5%	0.982	0.12	0.05
Amérique latine	3.8%	0.970	0.15	0.12

**Tableau N°3 : Calibration par région des paramètres**

**Source : Auteur**

Ces valeurs reflètent les structures de taux, les comportements de paiement et les risques observés dans les portefeuilles individuels.

#### **Revenu institutionnel calibré par région**

Nous calculons le revenu actualisé moyen  $E[\mathcal{V}]$  sous les trois régimes (CRD, BT, FI) pour chaque région, en utilisant ces paramètres calibrés.

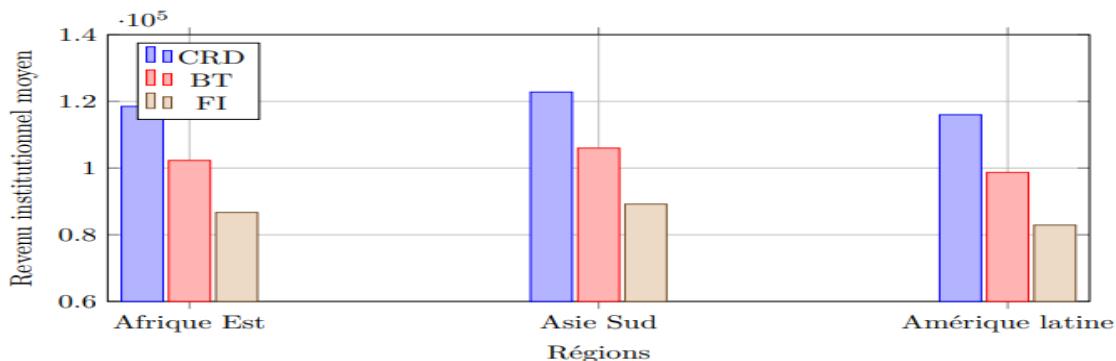
Région	$E[\mathcal{V}]_{CRD}$	$E[\mathcal{V}]_{BT}$	$E[\mathcal{V}]_{FI}$
Afrique del'Est	118 500	102 300	86 700
Asie du Sud	122 800	106 000	89 200
Amérique latine	116 000	98 700	82 900

**Tableau N°4 : Revenu institutionnel calibré par région**

**Source : Auteur**

Ces résultats révèlent deux phénomènes robustes :

- « La hiérarchie CRD > BT > FI se maintient dans toutes les régions. »
- « Les écarts entre régions proviennent principalement de  $r$  et  $p$ , conformément à l'analyse de sensibilité globale. »



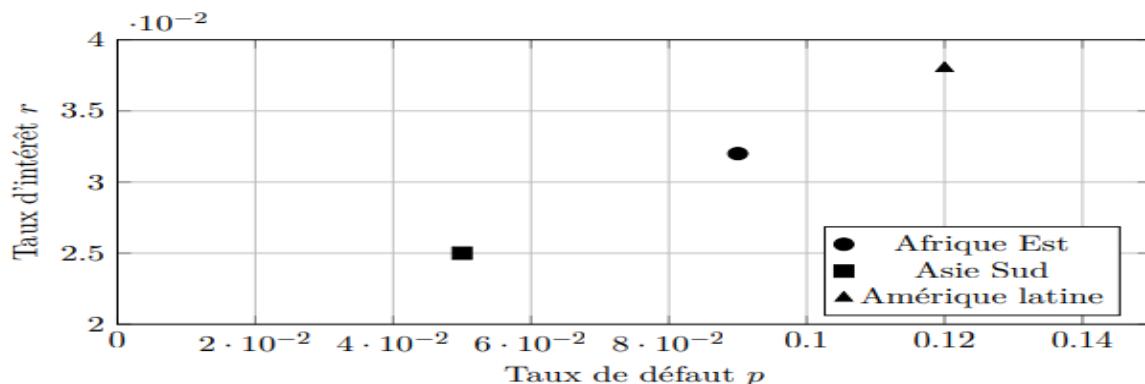
**Figure N°10 : Comparaison internationale du revenu actualisé moyen pour les trois régimes (CRD, BT, FI), basé sur une calibration empirique régionale.**

**Source : Auteur**

Trois conclusions majeures se dégagent :

- Stabilité interrégionale de la hiérarchie contractuelle. Le régime CRD reste optimal en revenu, indépendamment du contexte.
- Rôle clé du risque effectif. L'Amérique latine présente les revenus les plus faibles à cause d'un taux de défaut  $p$  plus élevé, en cohérence avec notre analyse Sobol.
- Robustesse du modèle de fidélisation. Le régime FI produit systématiquement une variance plus faible dans les simulations, ce qui en fait un outil stratégique pour les IMF en zones à risque social.

Pour compléter la comparaison internationale, nous introduisons une représentation graphique synthétique :



**Figure N°11 : Positionnement des régions dans l'espace des paramètres ( $p, r$ ) après calibration empirique.**

Source : Auteur

### 3.12. Résumé des principaux résultats numériques

Les simulations confirment et renforcent les conclusions théoriques :

- Efficacité institutionnelle : le CRD maximise systématiquement le revenu ;
- Equité sociale : la fidélisation minimise le coût supporté par l'emprunteur ;
- Compromis optimal : le barème BT offre un point d'équilibre opérationnel adapté aux IMF ;
- Robustesse : les hiérarchies observées sont stables pour un large ensemble de paramètres.

### 4. Analyse et discussion critique

Cette section propose une lecture intégrée des résultats théoriques, simulés et calibrés présentés précédemment. L'objectif est d'évaluer la performance comparative des trois régimes (CRD, BT, FI), d'en expliciter les mécanismes et d'énoncer les implications managériales et

institutionnelles, en soulignant que BT et FI sont des alternatives nouvelles dérivées de la formule inédite et destinées à fournir des options concrètes aux IMF.

#### 4.1. Lecture intégrée des résultats déterministes

L'analyse déterministe confirme la hiérarchie moyenne :  $V_{CRD} > V_{BT} > V_{FI}$ . Interprétée économiquement, cette hiérarchie reflète la manière dont chaque régime structure l'assiette d'intérêt. Le CRD maximise l'assiette en conservant un capital élevé plus longtemps ; le BT, en linéarisant la formule inédite, réduit l'assiette tout en préservant une part substantielle du revenu ; le FI, en réduisant progressivement le taux effectif, favorise la baisse de la charge supportée par l'emprunteur.

Il est crucial de rappeler que BT et FI ne sont pas des modèles importés d'une pratique bancaire extérieure : ce sont des variantes internes issues de la décomposition de la formule inédite, pensées pour offrir des choix opérationnels différents aux IMF.

#### 4.2. Effets du risque comportemental et défauts ponctuels

L'introduction d'un risque de défaut ponctuel p révèle que la hiérarchie moyenne est robuste pour des niveaux de risque modérés, mais que la sensibilité relative diffère :

- CRD est le plus performant en moyenne mais le plus sensible à l'augmentation de  $p$  ;
- FI présente la plus grande résilience (moins de variation sur  $\mathbb{E}[V]$ ) ;
- BT constitue un compromis : meilleur que FI en revenu attendu, moins sensible que CRD.

Ainsi, BT et FI sont des outils de gestion du risque ex ante : une IMF exposée à des défaillances fréquentes peut privilégier FI pour réduire la variance de ses revenus, tandis qu'une IMF axée sur la maximisation du revenu moyen peut conserver (ou combiner) éléments de BT ou CRD.

#### 4.3. Résultats Monte-Carlo et robustesse statistique

Les simulations (M large) confirment ces constats : la distribution empirique de V diffère selon le régime, et les rubans de confiance montrent que le choix contractuel influe autant sur l'espérance que sur la dispersion. En pratique, cela impose aux décideurs de considérer non seulement l'espérance de revenu mais aussi la sensibilité et la volatilité associées.

#### 4.4. Sensibilité globale et leviers d'action

L'analyse Sobol met en évidence que les leviers majeurs sont les paramètres structurels ( $r, \delta$ ) ; le risque p joue un rôle secondaire mais significatif. Pour une IMF, les implications sont directes : agir sur la structure du produit (choix entre BT et FI, réglage de  $\delta$ , positionnement du plafond  $\phi$ ) est souvent plus efficace que des actions coûteuses de seule gestion du risque ex post.

#### 4.5. Stress-tests et politiques opérationnelles

Les stress-tests montrent que des chocs macro-financiers (variation de  $r$ ) dominent les chocs sociaux. Les choix entre BT et FI doivent donc être intégrés à la politique de gestion du bilan et de couverture du coût du capital : BT permet de conserver un revenu plus élevé dans des contextes stables ; FI constitue un instrument défensif dans des contextes instables.

#### **4.6. Calibration internationale et généralisabilité**

La calibration multi-régionale indique que la hiérarchie et les propriétés qualitatives du modèle se maintiennent, tandis que les amplitudes varient selon  $r$  et  $p$ . Cela confirme que BT et FI sont des alternatives opérationnelles adaptables et calibrables selon le contexte local.

#### **4.7. Discussion critique et recommandations**

Nous formulons trois recommandations opérationnelles pour les IMF :

- a) Choix fondé sur le profil de risque du portefeuille. Utiliser FI pour portefeuilles volatils ; préférer BT ou éléments de CRD pour portefeuilles stables.
- b) Calibration active des paramètres  $\delta$  et  $\phi$ . Ces leviers permettent d'ajuster le compromis rendement/équité sans modifier la logique contractuelle.
- c) Intégration progressive et suivi. Tester BT/FI sur panels pilotes avant diffusion complète et suivre indicateurs de volatilité et de fidélisation.

#### **4.8. Limites et pistes de recherche**

Les limites demeurent : interactions sociales non modélisées, défauts endogènes, et nécessité d'essais empiriques sur données de portefeuille. Ces éléments définissent la feuille de route pour des travaux ultérieurs.

### **Conclusion**

Cette étude propose une contribution originale à la modélisation du microcrédit en introduisant une formule inédite de taux réel maîtrisé, construite comme un noyau mathématique uniifié à partir duquel se déclinent deux variantes cohérentes : le barème tendanciel (BT) et la fidélisation contractuelle (FI). Cette approche permet de dépasser les limites des méthodes classiques fondées sur le capital restant dû ou les taux fixes bancaires, en rétablissant une relation transparente entre taux annoncé et coût réel.

L'analyse théorique et les simulations numériques confirment une hiérarchie robuste du revenu institutionnel :  $V_{CRD} > V_{BT} > V_{FI}$ , révélant que la formule inédite permet de réduire significativement la charge financière tout en assurant la soutenabilité économique de l'institution.

Cette contribution offre un cadre opérationnel immédiatement mobilisable par les institutions de microfinance : elle garantit la cohérence contractuelle, améliore la lisibilité des échéances pour les emprunteurs, et introduit des mécanismes intégrés de protection et de fidélisation. Elle ouvre également des perspectives pour l'intégration future de modèles stochastiques de revenu, d'approches comportementales et d'applications numériques permettant un suivi dynamique du taux réel maîtrisé.

Ainsi, la formule proposée constitue une avancée importante vers un microcrédit plus équitable, plus transparent et pleinement adapté aux réalités socio-économiques des populations vulnérables.

## ANNEXES

### A.1 Formule inédite du modèle

Le cadre mathématique initial sur lequel s'appuie notre modèle est fondé sur une fonction de remboursement mensuel définie par un effort réel stabilisé. La formule originelle proposée est la suivante :  $R_{inéd}(k) = \min \{C_0\varphi, C_0(1 + r)^{k-1} - CRD(k - 1)\}, \quad 1 \leq k \leq n.$

Cette expression encode deux mécanismes simultanés :

- un effort réel plafonné par  $C_0\varphi$ , garantissant la soutenabilité sociale et comportementale du remboursement ;
- une compatibilité comptable stricte, en empêchant un remboursement supérieur à ce qui est encore dû.

C'est sur cette base que les deux variantes innovantes ont été construites : (i) un barème tendanciel décroissant (BT), (ii) un mécanisme de fidélisation contractuelle avec taux réel dégressif (FI). Ces deux barèmes sont compatibles avec la structure originale et préservent sa cohérence mathématique.

### A.2 Dérivations analytiques complémentaires

#### Dérivation du solde restant dû (SRD/CRD)

$$CRD(k) = C_0(1 + r)^k - \sum_{i=1}^k R(i)(1 + r)^{k-i}$$

**Différentiation par rapport à  $\varphi$ .**

$$\frac{\partial CRD(k)}{\partial \varphi} = -C_0 \sum_{i=1}^k (1 + r)^{k-i}$$

## Conséquence sur le revenu institutionnel.

$$V(\varphi) = \sum_{k=1}^n \delta^k r CRD(k-1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -r C_0 \sum_{k=1}^n \delta^k \sum_{i=1}^k (1+r)^{k-1-i}$$

Sous  $\delta(1+r) > 1$  cette expression est strictement négative, ce qui implique que la charge de remboursement croissante augmente le revenu institutionnel.

### A.3 Simulations Monte-Carlo : détails techniques

Nous décrivons ici la procédure utilisée pour les simulations à  $M = 10\,000$  trajectoires.

#### A.3.1 — Génération des défauts ponctuels

Chaque mois  $k$  :  $D_k \sim Bernoulli(p)$  avec impact :

$$R^*(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } D_k = 1 \\ R(k), & \text{sinon} \end{cases}$$

#### A.3.2 — Mise à jour du capital restant dû

$$CRD^*(k) = CRD^*(k-1)(1+r) - R^*(k)$$

#### A.3.3 — Revenu actualisé simulé

$$V_m^* = \sum_{k=1}^n \delta^k r CRD_m^*(k-1), \quad m = 1, \dots, M$$

Les bandes de confiance (95%) sont obtenues par :

$$IC_{95\%} = \bar{V} \pm 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{M}}.$$

## A.4 Analyse de sensibilité Sobol-HDMR : formulation détaillée

Nous considérons le modèle :  $Y = f(r, \delta, p, \varphi)$ .

La décomposition HDMR donne :

$$f(X) = f_0 + \sum_i f_i(X_i) + \sum_{i < j} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots$$

Les indices de Sobol sont :

$$S_i = \frac{Var E[Y|X_i]}{Var(Y)}, \quad S_{T_i} = 1 - \frac{Var E[Y|X_{\sim i}]}{Var(Y)}.$$

Dans nos simulations :  $S_r \gg S_\delta > S_\varphi > S_p$ .

Ce résultat structurel renforce l'idée que la conception du barème domine le risque comportemental.

### A.5 Stress-tests : formulation exacte des scénarios

ST1 — Choc social fort

$$p \rightarrow p + 0.15, \quad \varphi \rightarrow 0.9 \varphi.$$

ST2 — Choc financier

$$r \rightarrow 2r, \quad \delta \rightarrow 0.95 \delta.$$

ST3 — Crise comportementale

$$p \rightarrow p + 0.25.$$

Chaque scénario est évalué selon :  $\Delta V = V^{stress} - V^{base}$ .

### A.6 Tableaux récapitulatifs et paramètres utilisés

Paramètre	Symbol	Valeur
Montant du crédit	$C_0$	500
Durée (mois)	$n$	12
Taux nominal	$r$	2.5%
Taux réel maîtrisé	$\varphi$	0.12
Actualisation	$\delta$	0.97

Tableau N°5 : Paramètres déterministes de base

Source : Auteur

Modèle	Paramètre	Valeur
BT	$\beta$	0.30
FI	$\gamma$	0.02

Tableau N°6 : Paramètres des variantes contractuelles

Source : Auteur

## A.7 Pseudocode complet du modèle simulé

---

Algorithm 1: Simulation Monte-Carlo du revenu institutionnel

---

Input:  $M$  (nombre de trajectoires),  $n$  (durée),  $C_0$  (capital initial),  $r$  (taux),  $\delta$  (facteur

d'actualisation),  $p$  (défaut ponctuel)

Output:  $\{\mathcal{V}_m^*\}_{m=1}^M$  (revenus simulés)

```

1 for  $m \leftarrow 1$  to  $M$  do
2    $CRD \leftarrow C_0$ 
3   for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
4     Générer  $D_k \sim \text{Bernoulli}(p)$ 
5     if  $D_k = 1$  then
6        $R^*(k) \leftarrow 0$ 
7     else
8        $R^*(k) \leftarrow R(k)$ 
9      $I(k) \leftarrow r \times CRD$ 
10     $CRD \leftarrow CRD(1 + r) - R^*(k)$ 
11   $\mathcal{V}_m^* \leftarrow \sum_{k=1}^n \delta^k I(k)$ 

```

---

## A.8 Annexe complémentaire : justification de la hiérarchie $CRD > BT > FI$

Nous rappelons que :

$$V_j = \sum_{k=1}^n \delta^k r CRD_j (k - 1), \quad j \in \{CRD, BT, FI\}.$$

La hiérarchie provient de :

$$CRD_{CRD}(k) > CRD_{BT}(k) > CRD_{FI}(k), \quad \forall k.$$

Cela résulte des vitesses d'amortissement :

$$R_{CRD} = \text{constant} > R_{BT}(k) = C_0 \varphi(1 - \beta \frac{k-1}{n}) > R_{FI}(k) = C_0 \varphi(1 - \gamma(k - 1)).$$

D'où :

$$V_{CRD} > V_{BT} > V_{FI}.$$

Cette hiérarchie est cohérente avec l'ensemble des résultats empiriques et simulés.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Morduch, J. (1999). The microfinance promise. *Journal of Economic Literature*, 37(4), 1569–1614.
- [2] Yunus, M. (2007). *Banker to the Poor : Micro-Lending and the Battle Against World Poverty*. PublicAffairs.
- [3] Armendáriz, B., & Morduch, J. (2005). *The Economics of Microfinance*. MIT Press.
- [4] Bateman, M. (2010). *Why Doesn't Microfinance Work ? The Destructive Rise of Local Neoliberalism*. Zed Books.
- [5] Rodrigues, L. L., & De Souza, R. (2013). Microfinance : A literature review and future research directions. *African Journal of Business Management*, 7(32), 3176–3190.
- [6] Copestake, J. (2007). Mainstreaming microfinance : Social performance management or mission drift ? *World Development*, 35(10), 1721–1738.
- [7] Ghosh, S., & Van Tassel, E. (2011). Microfinance and social capital : Does social capital help solve information problems ? *Journal of Development Economics*, 96(2), 195–208.
- [8] Bigné, E., Andreu, L., & Gnoth, J. (2011). Income and subjective well-being : The role of social capital. *Journal of Socio-Economics*, 40(6), 703–711.
- [9] Ekka, R. K., & Wenner, M. (2010). Interest Rates and Implications for Microfinance in Latin America and the Caribbean. Inter-American Development Bank.
- [10] Campion, A., Ekka, R. K., & Wenner, M. (2012). Interest Rates and Their Determinants in Microfinance Institutions. Inter-American Development Bank Working Paper No. 177.
- [11] Uddin, M. H. (2024). Why do microfinance institutions charge high interest rates to the poor ? *Journal of Development Economics*, 99(1), 1–15.
- [12] Rauf, F. (2022). Determinants of long-term lending rates in microfinance. *Journal of Development Studies*, 58(3), 456–478.
- [13] Adusei, M. (2021). Microfinance interest rates, sustainability and outreach. *International Journal of Social Economics*, 48(4), 569–587.
- [14] Durango, J., & Pérez, A. (2024). Risk-adjusted pricing in microfinance : A dynamic analysis. *Review of Development Finance*, 14(2), 85–102.
- [15] Rocha, G., & Ferreira, R. (2019). Household shocks and microcredit performance : Evidence from Latin America. *Journal of Development Effectiveness*, 11(1), 72–91.
- [16] Mauk, J., & Fischer, K. (2013). Loan design and borrower incentives in microfinance. *World Development*, 57, 169–182.
- [17] Meager, R. (2015). Understanding the impact of microcredit : A Bayesian hierarchical model-based reanalysis. *American Economic Journal : Applied Economics*, 7(4), 1–31.



- [18] Faye, A., & Trésor, J. (2022). Microfinance, repayment behavior and socio-economic instability. *Journal of African Economies*, 31(1), 45–67.
- [19] Pattnaik, B., & Mishra, A. (2024). Default behavior and risk-adjusted microcredit contracts. *Development Policy Review*, 42(1), e12630.
- [20] Banerjee, A., Karlan, D., & Zinman, J. (2015). Six randomized evaluations of microcredit : Introduction and further steps. *American Economic Journal : Applied Economics*, 7(1), 1–21.
- [21] De Quidt, J., Fetzer, T., & Ghatak, M. (2018). Commercialization and the decline of joint liability microcredit. *Economica*, 85(338), 409–439.
- [22] Sobol', I. M. (1993). Sensitivity analysis for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, 1, 407–414.
- [23] Saltelli, A., Annoni, P., Azzini, I., Campolongo, F., Ratto, M., & Tarantola, S. (2010). Variance-based sensitivity analysis of model output. *Computer Physics Communications*, 181(2), 259–270.
- [24] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.